Föreläsning 4, Komplex analys

Elementära funktioner del II

Fö 3: $\exp w = z \Leftrightarrow w = \log z$

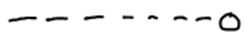
envärd, hel analytisk

flervärd. grenar $\widetilde{\log}\, z$.

$$\widetilde{\log}\, z = \ln|z| + i\underbrace{\theta(z)}_{\text{varierar kontinuerligt.}}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\widetilde{\log}\, z\right) = \frac{1}{z}$$

Principalgrenen $\mathrm{Log}\, z$, $-\pi < \theta < \pi$



* Potensfunktionen, z^α

I reell analys: $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Def: $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

I allmänhet flervärd.

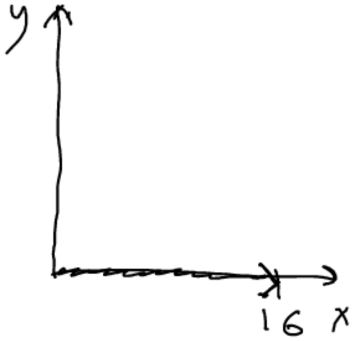
Ex. $(1+i)^i = \exp(i \log(1+i)) = \exp\left(i\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right)\right)$

$$= e^{-\frac{\pi}{4} - 2\pi n} \cdot e^{i\frac{\ln 2}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

oändligt många olika.

Ex: $16^{1/4} = \exp\left(\frac{1}{4}\log 16\right) =$

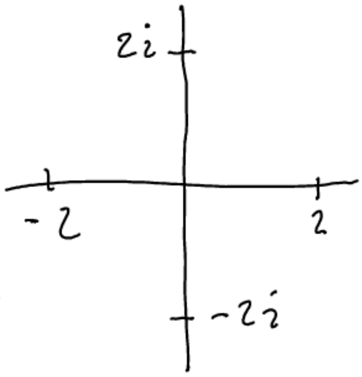
i komplex mening



$= \exp\left(\frac{1}{4}\left(\ln 16 + i2\pi n\right)\right)$

$= e^{\frac{\ln 16}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}n} = 2e^{i\frac{\pi}{2}n}, \; n \in \mathbb{Z}$

$= \underbrace{2, 2i, -2, -2i}_{\text{fyra olika tal.}}$



Sats: För fixa $z \neq 0$ och $\alpha \in \mathbb{C}$ gäller:

z^α antar $\left\{\begin{array}{l} \text{ett enda} \\ \text{ändligt många} \\ \text{oändligt många} \end{array}\right\}$ värden $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{Z} \\ \alpha \in \mathbb{Q} \\ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} \end{array}\right\}.$

Bevis: se boken.

Anmärkning: $z^n, n \in \mathbb{Z}$, betyder alltså samma (envärda) sak som tidigare, så t.ex. $z^2, \frac{1}{z^6}, \ldots$

Anmärkning: I Reell analys betyder $16^{1/4} = 2$.
I komplex analys betyder $16^{1/4} = 2, 2i, -2, -2i$.
Dessutom e^z i denna nya mening betyder också flera tal då $z \notin \mathbb{Z}$

Konvention i denna kurs.

$e^{\alpha} = \exp(\alpha)$ (envärd) $\alpha \in \mathbb{C}$, (envärd)

$x^{\alpha} = \exp(\alpha \ln x)$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$ (om inget annat sägs).

Så t.ex e^{3-i} och $16^{1/4}$ betyder ett tal var.

Ex $2^{1/2} = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. $2^{1/2} = \sqrt{2}$.

i komplex mening   i reell mening

Def: Principalvärdet av z^{α}, $PV(z^{\alpha}) = \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$

Ex: $PV(1+i)^{i} = \exp(i \operatorname{Log}(1+i)) = \exp\left(i\left(\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$
$= e^{\frac{-\pi}{4}} \cdot e^{i \cdot \frac{\ln 2}{2}}$.

Ex: $PV(16^{1/4}) = \ldots = 2$.

Om vi väljer en gren $\widetilde{\log}\, z$ till $\log z$

får vi en gren till z^{α} nämligen

$\exp(\alpha \widetilde{\log}\, z)$, $z \in \Omega$, ty

$\frac{d}{dz}(\exp(\alpha \widetilde{\log}\, z)) = \exp(\alpha \widetilde{\log}\, z) \cdot \frac{\alpha}{z}$.

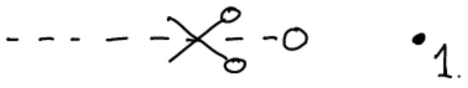
kedjeregeln

som kan skrivas $\frac{d}{dz}(\widetilde{z^{\alpha}}) = \widetilde{z^{\alpha}} \cdot \frac{\alpha}{z} \left(= \alpha\, \widetilde{z^{\alpha-1}}\right)$

Där snokbeteckningen ($\sim$) syftar till samma gren

till $\log z$ överallt.

Ex: Bestäm en gren f till $z^{1/2}$ i Ω: sådan att $f(1) = -1$



(OBS att $\underbrace{1^{1/2}}_{\text{komplex mening}} = 1$ eller -1)

Lösning: i Ω finns grenar $\operatorname{Log} z + 2\pi i \cdot n$ till $\log z$, $n \in \mathbb{Z}$,
och därmed grenar $\exp\left(\frac{1}{2}(\operatorname{Log} z + 2\pi i n)\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log} z\right)}_{\text{oberoende av } n} \cdot \underbrace{e^{i\pi n}}_{= (-1)^n}$

$\therefore$ vi får två grenar $\pm\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log} z\right)$ i Ω

Insättning av $z = 1$ ger $\pm\exp(\operatorname{Log} 1) = \pm\exp 0 = \pm 1$

Vi måste välja $-$.

$\therefore f(z) = -\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log} z\right) = -$ principalgrenen $z^{1/2}$.

---

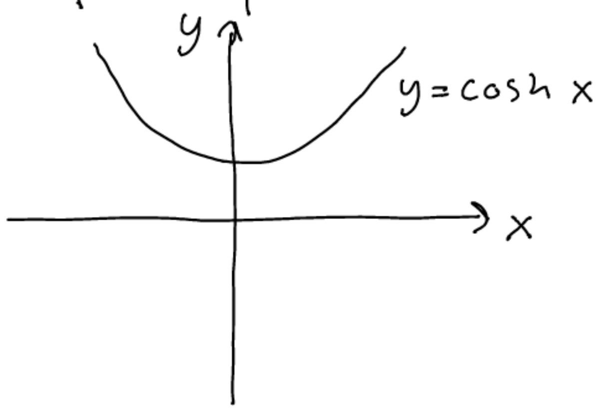
* Trigonometriska och hyperboliska funktioner.

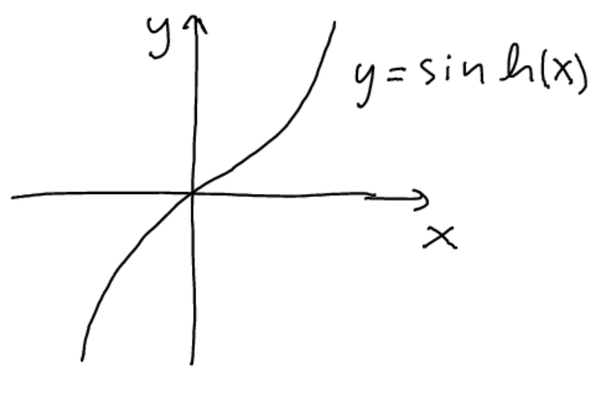
Def: $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{iz}}{2i}$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

överrensstämmer med de reella motsvarigheterna då z är reellt.

Grafer för reella cosh och sinh.





Vi ser att!

$\cos(iz) = \cosh z$ | $\sin(iz) = i\sinh(z)$

$\cosh(iz) = \cos z$ | $\sinh(iz) = i\sin(z)$.

Alla 4 är hela analytiska:

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin(z) \ , \ \frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z,$$

$$\frac{d}{dz}\big(\cosh(z)\big) = \sinh z \ , \ \frac{d}{dz}\big(\sinh(z)\big) = \cosh(z)$$

OBS: alla 4 antar alla komplexa värden. t.ex:

$$\cos(z) = w \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = w \Leftrightarrow \left[\begin{matrix}\text{sätt } s = e^{iz} \\ \text{då } s \neq 0\end{matrix}\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right) = w$$

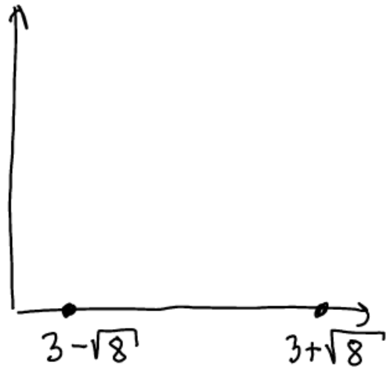
$$\underset{s\neq 0}{\Leftrightarrow} s^2 - 2ws + 1 = 0 \Leftrightarrow (s-w)^2 = w^2 - 1 \Leftrightarrow s - w = (w^2-1)^{1/2} \text{ (obs 2 värden)}$$

$$\Leftrightarrow s = w + (w^2-1)^{1/2} \quad \text{(OBS två värden)}$$

$$\underset{s=e^{iz}}{\Leftrightarrow} iz = \log\left(w + (w^2-1)^{1/2}\right) \quad \text{(OBS: massor utav värden)}$$

$$\Leftrightarrow z = \underbrace{-i\log\left(w + (w^2-1)^{1/2}\right)}_{\substack{\text{Kallas arccos } w. \\ \text{flervärd.}}} \ , \ w \in \mathbb{C}.$$

Ex! $\cos z = 3 \overset{s=e^{iz}}{\Leftrightarrow} z = -i\log(3+\underbrace{8^{1/2}}_{\text{komplex mening.}})$



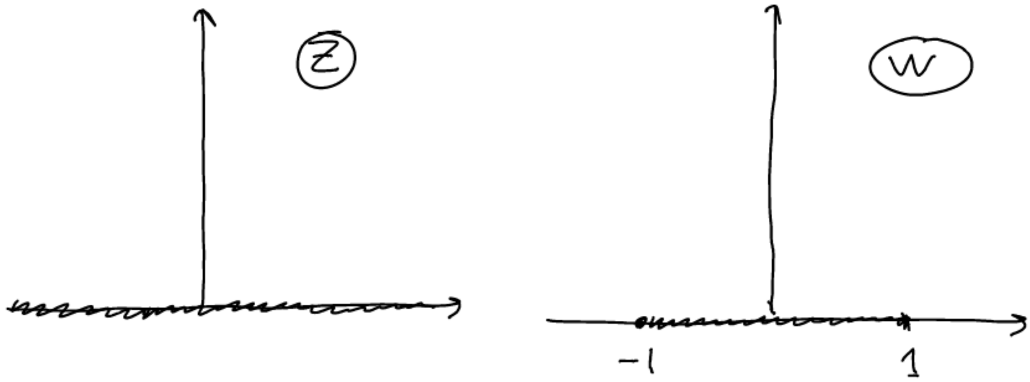
$= -i\log(3\pm\sqrt{8}) = -i(\ln|3\pm\sqrt{8}| + i2\pi n)$

$= 2\pi n - i\ln(3\pm\sqrt{8})$

$= 2\pi n \mp i\ln(3+\sqrt{8}), \quad n\in\mathbb{Z}.$

$(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8}) = 1$

Ex. Visa att $\cos z \in [-1,1] \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$



Bevis! $\Leftarrow$ vet vi redan.

$\Rightarrow$) om $w\in\mathbb{R}$, $-1\le w\le 1$ så är $(\underbrace{w^2-1}_{\substack{\text{reellt.}\\ \le 0.}})^{1/2} = \pm i\sqrt{1-w^2}$

och därmed $z = -i\log(\underbrace{\overset{\text{reellt}}{w}\pm i\overset{\text{reellt.}}{\sqrt{1-w^2}}}_{\text{längd 1.}}) = -i(\ln 1 + i\arg(w\pm i\sqrt{1-w^2}))$

$= \arg(w\pm\sqrt{1-w^2}) \in\mathbb{R}$

$\blacksquare$

Kända trigonometriska samband t.ex

$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

$\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w.$

$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

$\vdots$

Gäller fortfarande.

Däremot, $\cancel{|\sin z| \leq 1 \quad \forall z}$ ← helt fel.

Ex betrakta avbildningen $w = \sin z$.

ange bilderna av

a) linjen $x = a$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$

b) linjen $y = b$ $b > 0$

Lösning:

$w = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \underbrace{\cos(iy)} + \cos x \sin iy$

$= \underbrace{\sin x \cosh(y)}_{u} + i \underbrace{\cos x \sinh(y)}_{v.}$

a) $u = \underbrace{\sin(a)}\cosh(y)$, $v = \underbrace{\cos(a)}\sinh(y)$, $y \in \mathbb{R}$

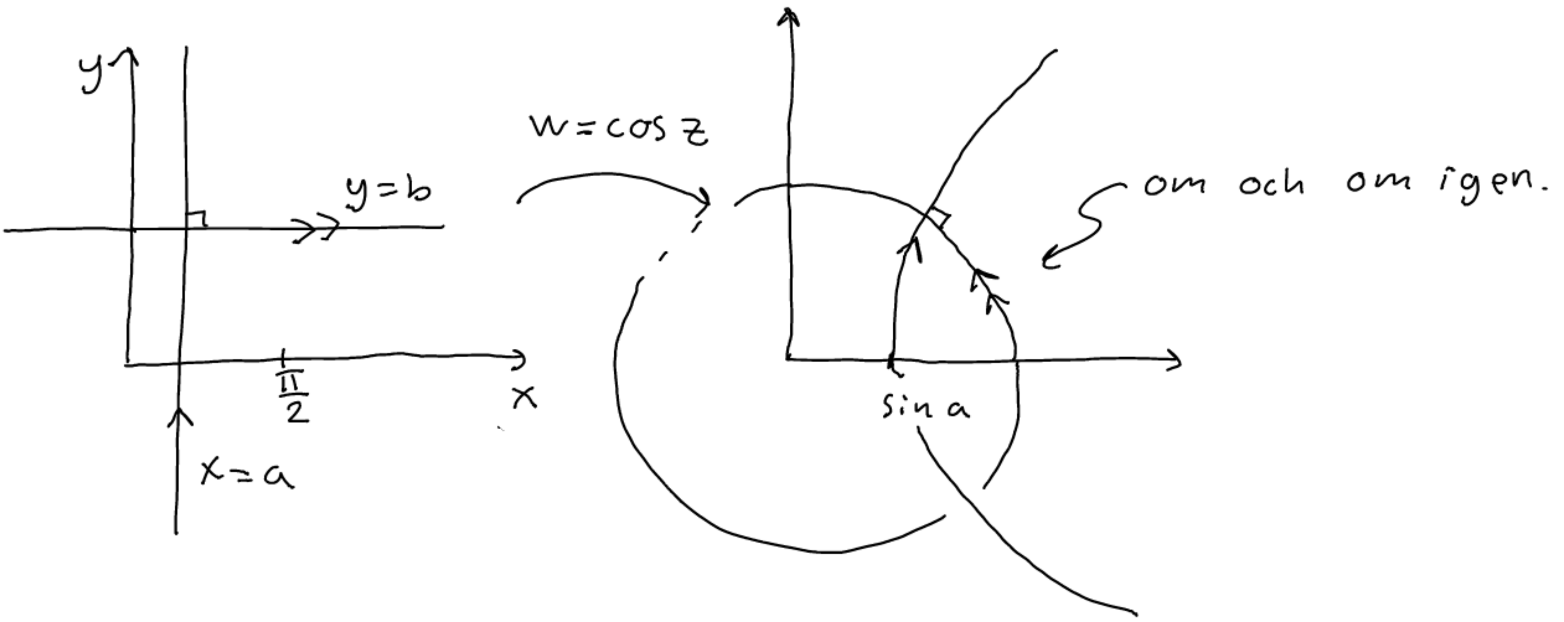
>0 ty $0 < a < \frac{\pi}{2}$

hyperboliska ettan $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$

ger:

$$\left(\frac{u}{\sin a}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos a}\right)^2 = 1. \qquad u \geq \sin a$$

∴ Hyperbelgren.



b) $y=b$ ger:

$$u = \underbrace{\cosh(b)}_{>1} \cdot \sin x, \quad v = \underbrace{\sinh(b)}_{>0} \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Trigettan $\Rightarrow$

$$\left(\frac{u}{\cosh(b)}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh(b)}\right)^2 = 1 \qquad \text{Ellips (många varv).}$$