Tredjegradsekvationen

Peter Johansson, Matematiska institutionen,
Linköpings universitet, 581 83 Linköping
Tel: 013–28 28 39
E-post: pejoh@math.liu.se

Denna uppsats är en del av redovisningen av seminarieuppgiften om tredjegradsekvationen i kursen "matematikens historia" som ges av Gunnar Fogelberg vid Linköpings universitet våren 1996. Som källa har böckerna [5] av Stillwell, [2] av Edwards, [1] av Cardano, [6] av Struik och [4] av Hall samt information via WWW på följande URL använts: `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/`

1. Den historiska utvecklingen

1.1. Greker och araber, geometriska lösningsmetoder.

Grekerna, bland annat *Arkimedes* (ca 287–212 f.Kr.), använde skärningspunkter mellan kägelsnitt för att lösa vissa tredjegradsekvationer (med positiva rötter). Bland araberna utvidgade *Omar Khayyam* (ca 1048–1122) denna metod till alla tredjegradsekvationer med positiva rötter genom att söka skärningen mellan en cirkel och en parabel. Omar behandlade också vissa fjärdegradsekvationer.

1.2. Renässansen. De allmänna lösningarnas upptäckt.

I norditalien på 1500-talet upptäcktes formler för lösningarna av tredje- och fjärdegradsekvationerna. Detta skedde under det att kraftiga konflikter uppstod. De inblandade personerna var *Scipione del Ferro* (1465–1526), *Tartaglia* (vilket betyder stammaren, egentligen hette han Niccolò Fontana) (1499–1557), *Geronimo Cardano* (1501–1576) och *Lodovico Ferrari* (1522–1565). Upptäckten av dessa lösningar var väsentligen det första överträffandet av vad grekerna och araberna hade uträttat. Överträffandet av deras gamla resultat fick stor psykologisk effekt och banade väg för nya upptäckter inom matematiken.

En anledning till att konflikter uppstod är att man på den tiden inte snabbt publicerade sina resultat för att få sitt namn inskrivet i historieböckerna. Istället hemlighöll man ofta sina resultat, som ett slags trumfkort eller trolleritrick. Den förste som löste den allmänna tredjegradsekvationen var del Ferro, det finns omvittnat och nedskrivet av Ferrari och nämns också av Cardano i "*Ars Magna*" som finns i engelsk översättning [1]. Han gjorde det omkring år 1515 då han var professor vid universitetet i Bologna. Lösningen lämnade han, enligt den pythagoreiska traditionen, under tysthetslöfte till sina elever. En av eleverna, *Antonio Maria Fior* från Venedig, använde denna kunskap till att utmana Tartaglia i en tävling år 1535. Detta fick Tartaglia att anstränga sig till det yttersta, och han lyckades lösa alla uppgifterna i tävlingen (vilket Fior inte gjorde). Han har troligtvis därmed, oberoende av del Ferro, löst den allmänna tredjegradsekvationen. Detta gjorde Cardano mycket intresserad. Efter vissa turer, inklusive ett löfte om att bevara lösningsmetoden hemlig (enligt Tartaglia), fick han till sist reda på lösningen och hjälp att förstå den av Tartaglia. Trots tysthetslöftet offentliggjorde Cardano år 1545 lösningen av tredjegradsekvationen, med Tartaglia angiven som upphovsman, i sin bok Ars Magna. Samtidigt nämns att det var del Ferro som gjorde den första lösningen. Detta ledde till ett långt och våldsamt gräl mellan Tartaglia och Ferrari (som försvarade Cardano), emedan Cardano höll sig ganska passiv.

Den förste att lösa den allmänna fjärdegradsekvationen var Cardanos elev Ferrari, som överträffade sin lärare genom detta när han själv var 23 år. Den lösningen finns också i Ars Magna, där 20 olika fall diskuteras. Dessa fall kallas de mest allmänna och Cardano nämner att det finns 67 andra fall. Anledningen till uppdelningen i olika fall var mestadels att att bevisen bygger på geometri och därför betraktas endast positiva koefficienter.

Den s.k. Cardanos formel för rötterna till en tredjegradsekvation borde alltså egentligen heta del Ferros formel. I vissa fall producerar formlerna reella lösningar som summan eller skillnaden av komplexa tal, detta kunde Cardano ej tolka. Cardano noterade dock att det ibland blev negativa tal under rottecknet, t ex när han försökte lösa $x^3 = 15x + 4$ och han visste att en lösning är $x = 4$. Han skrev till Tartaglia den 4 augusti 1539 om detta problem, men Tartaglia kunde inte heller förklara det. *Raffael Bombelli* (1526–1573) publicerade dock i sin bok *Algebra* år 1572 ett sätt att räkna med komplexa tal, vilket gjorde det möjligt att förklara fallet $x^3 = 15x + 4$. Bombellis förklaring bygger dock på att man vet att $x = 4$ är en lösning.

1.3. Efter de allmänna lösningarnas upptäckt.

Efter Ars Magna bidrog många matematiker med olika varianter på lösningar av tredje- och fjärdegradsekvationer, *François Viète* (1540–1603), *Thomas Harriot* (1560–1621), *René Descartes* (1596–1650), *Ehrenfried Walter von Tschirnhaus* (1651–1708), *Leonhard Euler* (1707–1783) och *Étienne Bézout* (1730–1783) konstruerade alla metoder. Av dessa finns Viètes respektive Harriots varianter i avsnitt 3 respektive 4. Tschirnhaus konstruerade en transformation som transformerar en ekvation av grad n till en ekvation av grad n utan termerna x^{n-1} och x^{n-2} vilket svensken *Erland Samuel Bring* (1736–1798) lyckades förbättra för femtegradsekvationen så att även termen x^2 elimineras. *George Birch Jerrard* (1804–1863) upptäckte senare, oberoende av Bring, en generalisering av Brings resultat till en ekvation av grad n. Jerrards upptäckt skedde efter att *Paolo Ruffini* (1765–1822) och *Niels Henrik Abel* (1802–1829) hade visat att den allmänna femtegradsekvationens lösning ej kunde uttryckas i radikaler, medan Brings upptäckt skedde innan.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) verkar vara den förste att verifiera del Ferros formler och därmed ge ett algebraiskt bevis för dem, till skillnad från de tidigare geometriska bevisen. Detta gjorde han genom att sätta in de tre lösningarna x_1, x_2, x_3 i uttrycket $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, vilket finns dokumenterat i ett brev han skickade till *Christiaan Huygens* (1629–1695) i mars 1673. Att $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ ger tredjegradsekvationen hade tidigare observerats av Harriot.

Alexandre Théophile Vandermonde (1735–1796) och *Joseph-Louis Lagrange* (1646–1716) fann oberoende av varandra en beskrivning av lösningen av tredjegradsekvationen som finns i avsnitt 5. Vandermonde presenterade sitt arbete för akademien i Paris 1770 emedan Lagrange publicerade sitt mer omfattande arbete *Refléxions sur la Résolution Algébrique des Equations* några månader senare. Vandermondes arbete blev dock inte publicerat förrän 1774. I Lagranges Refléxions finns en systematisk beskrivning av lösningar av ekvationer av grad 2, 3 och 4 ur många synvinklar.

2. del Ferros formler

I Ars Magna beskriver Cardano lösningen av tredjegradsekvationer i 13 olika fall,

$$\begin{array}{llll} x^3 + px = q, & x^3 = px^2 + q, & x^3 + px^2 + qx = r, & x^3 + qx + r = px^2, \\ x^3 = px + q, & x^3 + px^2 = q, & x^3 + qx = px^2 + r, & x^3 + px^2 + r = qx, \\ x^3 + q = px, & x^3 + q = px^2, & x^3 + px^2 = qx + r, & x^3 + r = px^2 + qx, \\ & & x^3 = px^2 + qx + r. & \end{array}$$

Där finns också metoden att reducera en allmän tredjegradsekvation genom substitutionen $x \mapsto x - \frac{1}{3}a_2$ beskriven. Det följande är ungefär (med modern notation) del Ferros lösning, som är för fallet $x^3 + px = q$.

Notera att $(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3$. Om a och b satisfierar

$$3ab = p \tag{2.1}$$

och

$$a^3 - b^3 = q \tag{2.2}$$

så är $a - b$ en lösning till

$$x^3 + px = q. \tag{2.3}$$

Men nu ger (2.1) att $b = p/3a$. Detta insatt i (2.2) ger

$$a^3 - \frac{p^3}{27a^3} = q,$$

dvs

$$a^6 - qa^3 - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{2.4}$$

Detta är en andragradsekvation i a^3 så lös ut a^3 med formeln för andragradsekvationen. Nu får vi a genom att dra kubikroten ur en lösning till andragradsekvationen och b kan fås på liknande sätt (eller genom $b = p/3a$). Nu har vi att $x = a - b$ är en lösning till tredjegradsekvationen (2.3).

Vi kan sammanfatta del Ferros lösning med formeln

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}$$

Lösningen finns också beskriven i modern notation av Edwards i [2], s. 4–5, §5 och för fallet $x^3 = px + q$ av Stillwell i [5], s. 55, avsnitt 5.5.

3. Viètes lösning

Viète föreslog år 1591 följande lösning på tredjegradsekvationen $x^3 = 3px + 2q$ i fallet $q^2 < p^3$. Sätt $x = k\cos z$. Ekvationen blir då $k^3\cos^3 z - 3pk\cos z = 2q$. Observera att $\cos 3z = 4\cos^3 z - 3\cos z$ så om vi väljer k så att

$$\frac{k^3}{pk} = 4, \text{ dvs } k = 2\sqrt{p}$$

får vi

$$4\cos^3 z - 3\cos z = \frac{2q}{pk},$$

dvs

$$\cos 3z = \frac{q}{p\sqrt{p}}.$$

Slutligen fås lösningarna

$$x_1 = 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{q}{p\sqrt{p}}\right)\right)$$
$$x_2 = 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{q}{p\sqrt{p}}\right) + \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$x_3 = 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{q}{p\sqrt{p}}\right) + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Eftersom man hade tabeller för de trigonometriska funktionerna kunde man lösa detta genom tabellslagning. Denna lösning undviker problemet att en reell lösning blir summan av två komplexa tal, som del Ferros lösning har. del Ferros lösning har det problemet just i fallet $q^2 < p^3$ (tre reella distinkta rötter). Å andra sidan kan man i ljuset av den komplexa analysen som utvecklades under 1800-talet definiera $\cos z$ i hela $\mathbf{C}$ (komplexa talplanet) och faktiskt se att Viètes lösningsformler är allmängiltiga.

Viètes lösning finns också beskriven i modern notation av Stillwell i [5], s. 56, avsnitt 5.6.

4. Harriots lösning

Skriv tredjegradsekvationen på formen $x^3 + 3px = 2q$. Sätt in

$$x = y - \frac{p}{y} = \frac{y^2 - p}{y}$$

i ekvationen. Då fås

$$y^6 - 2qy^3 = p^3 \tag{4.5}$$

som är en andragradsekvation i y^3 där vi kan lösa ut

$$y^3 = \sqrt{p^3 + q^2} + q. \tag{4.6}$$

Ur (4.5) får vi $(p/y)^3 = y^3 - 2q$ och om vi sätter in (4.6) i högerledet

$$\left(\frac{p}{y}\right)^3 = \sqrt{p^3 + q^2} - q. \tag{4.7}$$

Nu har vi en lösning $x = y - p/y$ till den ursprungliga tredjegradsekvationen där vi får y respektive p/y genom att dra kubikroten ur (4.6) respektive (4.7).

5. Vandermondes och Lagranges lösning

Låt x, y, z vara lösningarna till en given tredjegradsekvation. Då kan varje symmetriskt polynom i x, y, z skrivas som ett polynom i koefficienterna till tredjegradsekvationen, detta är fundamentalsatsen för symmetriska polynom för fallet tredjegradsekvation. Fundamentalsatsen var känd av Newton åtminstone för tredjegradsekvationen och finns i hans anteckningar som dateras till år 1665–1666, enligt Whiteside [7]. I [2] finns ett bevis för fundamentalsatsen i §11 och Newtons 19 formler som beskriver sambanden finns i §9. Låt α vara en primitiv kubikrot till 1, dvs komplext tal sådant att $\alpha^3 = 1, \alpha \neq 1$. Observera att $\alpha^2 + \alpha + 1 = (\alpha^3 - 1)/(\alpha - 1) = 0$. Lagrange observerade att $t = x + \alpha y + \alpha^2 z$ kan anta sex olika värden beroende på ordningen av rötterna x, y, z. Dessa sex värden är lösningar till en sjättegradsskvation $(X - t_1)(X - t_2)(X - t_3)(X - t_4)(X - t_5)(X - t_6) = 0$ vars koefficienter kan visas vara symmetriska i x, y, z och är därför uttryckbara som polynom i tredjegradsekvationens koefficienter. Lagrange kallar denna ekvation för resolventen och den är lösbar eftersom det visar sig att den faktiskt är en andragradsekvation i X^3. Detta kan lätt ses om man ordnar $t_1, \dots, t_6$ enligt följande

$$\begin{aligned} t_1 &= x + \alpha y + \alpha^2 z, t_2 = \alpha t_1, t_3 = \alpha^2 t_1, \\ t_4 &= x + \alpha z + \alpha^2 y, t_5 = \alpha t_4, t_6 = \alpha^2 t_4, \end{aligned}$$

då får man

$$(X - t_1)(X - t_2)(X - t_3) = (X - t_1)(X - \alpha t_1)(X - \alpha^2 t_1) = X^3 - t_1^3$$

och resolventen blir då

$$(X^3 - t_1^3)(X^3 - t_4^3) = X^6 - (t_1^3 + t_4^3)X^3 + t_1^3 t_4^3 = 0.$$

När väl de sex lösningarna till resolventekvationen är funna fås lösningarna till tredjegradsekvationen genom

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{3}\left((x+y+z) + t_1 + t_4\right), \\ y &= \tfrac{1}{3}\left((x+y+z) + \alpha^2 t_1 + \alpha t_4\right), \\ z &= \tfrac{1}{3}\left((x+y+z) + \alpha t_1 + \alpha^2 t_4\right), \end{aligned}$$

och problemet blir nu att identifiera t_1 och t_4 bland lösningarna till resolventekvationen. Vandermonde hade ett lite annorlunda angreppssätt och fick variablerna $u = t_1^3$ och $v = t_4^3$ och lyckades inte genomskåda något sätt att välja lämpliga kubikrötter att sätta in i lösningsformlerna utan föreslog istället att man skulle sålla ut de tre rötterna genom att sätta in kandidaterna till lösningar i ursprungsekvationen. Men Lagrange oberverade att om nu t är en lösning till resolventekvationen så kan man tänka sig en omordning av x, y, z så att $t = x + \alpha y + \alpha^2 z$. Lagrange observerade sedan att $(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z)$ är symmetrisk i x, y, z så det uttryckets värde, w säg, kan bestämmas ur koefficienterna till tredjegradsekvationen. Nu får man rötterna genom

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{3}\left((x+y+z) + t + \frac{w}{t}\right), \\ y &= \tfrac{1}{3}\left((x+y+z) + \alpha^2 t + \frac{w}{\alpha^2 t}\right), \\ z &= \tfrac{1}{3}\left((x+y+z) + \alpha t + \frac{w}{\alpha t}\right), \end{aligned}$$

där t får vara vilken som helst av de sex rötterna till resolventekvationen!

Detta resonemang kan även generaliseras till fjärdegradsekvationen vilket både Vandermonde och Lagrange gjorde. Det naturliga är att studera

$$t = x + iy - z - ir = x + iy + i^2 z + i^3 r$$

där x, y, z, r är rötterna till en fjärdegradsekvation, men det visar sig fungera och dessutom bli enklare om man istället studerar $t = x - y + z - r$ eftersom de 24 olika permutationerna endast producerar sex olika värden, $\pm t_1, \pm t_2, \pm t_3$, och resolventekvationen blir då en tredjegradsekvation i X^2. Man kan resonera sig fram till att man kan ta t_1 och t_2 som vilka två som helst av lösningarna till resolventen bara det gäller att $t_1 \neq -t_2$ (man får undanta fallet att fjärdegradsekvationen har två rötter lika). Sen observeras att $t_1 t_2 t_3 = w$ är symmetrisk i x, y, z, r och lösningarna fås som

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4}\left((x+y+z+r) + t_1 + t_2 + \frac{w}{t_1 t_2}\right), \\ y &= \tfrac{1}{4}\left((x+y+z+r) - t_1 + t_2 - \frac{w}{t_1 t_2}\right), \\ z &= \tfrac{1}{4}\left((x+y+z+r) + t_1 - t_2 - \frac{w}{t_1 t_2}\right), \\ r &= \tfrac{1}{4}\left((x+y+z+r) - t_1 - t_2 + \frac{w}{t_1 t_2}\right). \end{aligned}$$

En mer utförlig beskrivning av Lagranges och Vandermondes lösningar av tredje- och fjärdegradsekvationerna med förklaringar om vad som är en naturlig form för lösningarna finns beskrivet av Edwards i [2], §14.

6. Lösningsformler med hjälp av Maple

För jämförelsens skull har författaren tagit fram resultatet man får om man låter ett symboliskt algebraprogram (Maple) bestämma lösningarna till den allmänna tredjegradsekvationen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Man får då lösningarna

$$\begin{aligned}
x_1 &= s - \frac{1}{9}\frac{3\,ac - b^2}{a^2 s} - \frac{b}{3\,a},\\
x_2 &= -\frac{1}{2}s + \frac{1}{18}\frac{3\,ac - b^2}{a^2 s} - \frac{b}{3\,a} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(s + \frac{1}{9}\frac{3\,ac - b^2}{a^2 s}\right),\\
x_3 &= -\frac{1}{2}s + \frac{1}{18}\frac{3\,ac - b^2}{a^2 s} - \frac{b}{3\,a} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(s + \frac{1}{9}\frac{3\,ac - b^2}{a^2 s}\right),
\end{aligned}$$

där

$$s = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}\sqrt{27\,a^2d^2 + 4\,ac^3 - 18\,abcd - b^2c^2 + 4\,b^3d}}{18\,a^2} - \frac{27\,a^2d - 9\,abc + 2\,b^3}{54\,a^3}}.$$

För att få en rättvis jämförelse med del Ferros formler i avsnitt 2 har författaren också löst den reducerade ekvationen $x^3 + px = q$ med Maple och fick då lösningarna

$$\begin{aligned}
x_1 &= a - \frac{p}{3\,a},\\
x_2 &= -\frac{a}{2} + \frac{p}{6\,a} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{p}{3\,a} + a\right),\\
x_3 &= -\frac{a}{2} + \frac{p}{6\,a} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{p}{3\,a} + a\right),
\end{aligned}$$

där

$$a = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{12\,p^3 + 81\,q^2}}{18} + \frac{q}{2}}$$

och om man vet att $\frac{1}{3}p$ respektive $\frac{1}{2}q$ ingår i lösningsformlerna kan man, liksom Harriot (se avsnitt 4), istället få idén att lösa $x^3 + 3px = 2q$ med Maple och får då lösningarna

$$\begin{aligned}
x_1 &= a - b,\\
x_2 &= \frac{1}{2}(b - a) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(a + b),\\
x_3 &= \frac{1}{2}(b - a) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(a + b),
\end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt[3]{\sqrt{p^3 + q^2} + q},\\
b &= \frac{p}{\sqrt[3]{\sqrt{p^3 + q^2} + q}} = \sqrt[3]{\sqrt{p^3 + q^2} - q},
\end{aligned}$$

där den sista likheten är en förenkling som författaren gjort för hand. Denna förenkling är, för principalgrenen av kubikroten, endast giltig då $p \geq 0$. Vi hamnar då precis på den form som Harriots lösning har. Notera att Maple av någon anledning själv hittar de gemensamma uttrycken a och b i detta fall, men i föregående fall behåller den uttrycket $p/3a$ istället för att införa en ny beteckning.

7. Ferraris lösning av fjärdegradsekvationen

Med substitutionen $x \mapsto x - c$ där c är $\frac{1}{4}$ av koefficienten framför x^3 kan den allmänna fjärdegradsekvationen reduceras till $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. En kvadratkomplettering ger ekvationen på formen $(x^2 + p)^2 = px^2 - qx - r + p^2$. För varje y gäller nu

$$(x^2 + p + y)^2 = px^2 - qx - r + p^2 + 2y(x^2 + p) + y^2 \tag{7.8}$$

där högerledet kan skrivas som $(p+2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2)$ och är en andragradsekvation i x. Vi kan nu välja y så att denna andragradsekvation får formen $(p+2y)(x+A)^2$. Det får den om diskriminanten är noll, dvs $q^2 - 4(p+2y)(p^2 - r + 2py + y^2) = 0$. Men denna ekvation är en tredjegradsekvation i y nämligen $(q^2 - 4p^3 + 4pr) + (8r - 16p^2)y - 20py^2 - 8y^3 = 0$. Den kan vi lösa och genom att sätta in en lösning i (7.8) och skriva om högerledet på formen $(p + 2y)(x + A)^2$ får vi efter rotutdragning en andragradsekvation i x kvar att lösa och dess lösningar är också lösningar till fjärdegradsekvationen.

En annan, lite kortare, beskrivning i modern notation av väsentligen denna lösning finns i [2], s. 5, §6. Lösningen blir lite mer koncis genom att studera $(x^2 + y)^2$ direkt istället för att kvadratkomplettera först.

Referenser

1. Cardano, G. *Ars Magna, or, The Rules of Algebra.* Dover, New York, 1993.

2. Edwards, H. M. *Galois Theory.* No. 101 in GTM. Springer-Verlag, New York, 1984.

3. Gindikin, S. G. *Tales of Physicists and Mathematicians.* Birkhäuser, Boston, 1988.

4. Hall, T. *Matematikens utveckling.* Gleerup Bokförlag, Lund, 1970.

5. Stillwell, J. *Mathematics and Its History.* Springer-Verlag, New York, 1989.

6. Struik, D. J. *A Concise History of Mathematics*, 2nd revised ed. Dover, 1948.

7. Whiteside, D. T., Ed. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, vol. I. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967.