1 Algebra

$$(a_1\beta + a_0)(b_1\beta + b_0) = a_1b_1\beta^2 + (a_1b_0 + a_0b_1)\beta + a_0b_0$$

Och nu är

$$a_1b_0 + a_0b_1 = a_1b_1 + a_0b_0 - (a_1 - a_0)(b_1 - b_0)$$

2 Historia

Charles Babbage, 1864, Analytical Engine. Räkneenheten skulle hantera tal på 50 siffror. Men kan multiplicera siffror upp till 100 siffror med hjälp av fyra multiplikationer med 50 siffror.

1960 Kolmogorovs cybernetiksemarium i Moskva.

3 Hur mycket jobb är addition och multiplikation?

För att addera två tal på 8 siffror, så behöver man addera två siffror (och kanske en övergångssiffra) 8 gånger. Siffror på motsvarande plats läggs ihop. Men för att multiplicera två tal på 8 siffror, på det vanliga sättet, så behöver man multiplicera varje siffra i det ena talet med varje siffra i det andra, så man måste envända multiplikationstabellen 64 gånger.

Andrej Nikolajevitj Kolmogorov (då 57) arrangerade 1960 ett seminarium om matematik och datavetenskap, och sade att han trodde att multiplikation var "kvadratisk", att dubbla antalet siffror gör att multiplikationen tar 4 gånger så lång tid, eftersom det var så för de metoder som använts for att multiplicera i flera tusen år.

Studenten Anatolij Alexejevitj Karatsuba, 23 år gammal, funderade på problemet, och en vecka senare hade han hittat ett mycket användbart trick.

4 Exempel

För 61×97, har vi $6 - 1 = 5$ och $9 - 7 = 2$,

6×9		1×7		
5	4	0	7	
$+$	5	4		6×9
$+$	0	7		1×7
$-$	1	0		-5×2
5	9	1	7	

Ett andra exempel, 73×86, då har vi $7 - 3 = 4$ och $8 - 6 = 2$.

7×8		3×6		
5	6	1	8	
$+$	5	6		7×8
$+$	1	8		3×6
$-$	0	8		-4×2
6	2	7	8	

Ett tredje exempel, 12×11, då har vi $1 - 2 = -1$ och $1 - 1 = 0$,

1×1		2×1		
0	1	0	2	
$+$	0	1		1×1
$+$	0	2		2×1
$+$	0	0		1×0
0	1	3	2	

Nu är det roliga att man kan klippa i större delar än bara en siffra. Till exempel för 6173×9786, så klipper vi i halvor på samma sätt. Vi har $61 - 73 = -12$ och $97 - 86 = 11$. Och vi har redan räknat ut alla delar som behövs:

	61×97				73×86			
5	9	1	7	6	2	7	8	
$+$		5	9	1	7			61×97
$+$		6	2	7	8			73×86
$+$		0	1	3	2			$-(-12) \times 11$
6	0	4	0	8	9	7	8	

5 Stora tal

Om man dubblar antalet siffror, så blir addition dubbelt så mycket jobb. Men vanlig multiplikation blir 4 gånger så mycket jobb! Karatsubas metod blir det bara tre gånger så mycket. Och för stora tal gör det stor skillnad.

Antal siffror	Addition	Multiplikation	Karatsuba	Skillnad
1	1	1	1	0%
2	2	4	3	25%
4	4	16	9	44%
8	8	64	27	58%
⋮	⋮	⋮	⋮	
128	128	16 384	2 187	87%
⋮	⋮	⋮	⋮	
1024	1024	1 048 576	59 049	94%

6 Söndra och härska

Ett mönster som används för många algoritmer: Ta ett problem, dela upp det i flera mindre problem, lösa dem, och pussla ihop lösningarna till en lösning av det ursprungliga problemet.