Sammanfattning

Ett försök att förstå hur utlåning och penningmängd funkar. Det finns ett par kända problem i modellen, se avsnitt 5.

1 Notation

Låt oss anta att vi har två parter, banken B och resten av samhället S. Vi försöker hålla reda på deras tillgångar och skulder år från år, och låter X^t betyda värdet år t. För banken har vi

- Eget kapital E_B.
- Kassa, K_B.
- Lån till samhället, L.
- Pengar lånade ur intet, bokförda som en skuld M.

Balansräkningen är $K_B + L = E_B + M$. Vi startar år $t = 0$ med $L^0 = M^0 = 0$ och $E_B^0 = K_B^0$.

För samhället, alltså bankens kunder, har vi

- Eget kapital E_S.
- Kassa, K_S.
- Lån från banken, L.

Balansräkningen är $K_S = E_S + L$.

Sen är det lite oklart vad "penningmängd" är i den här modellen, men det borde väl vara ungefär $P = K_B + K_S$.

Så har vi ett par parametrar, årlig ränta r, reservationsgrad f, önskad tillväxt g, och kreditförluster k.

2 Transaktioner

Vi har fyra sorters transaktioner: lån, amortering, räntebetalning och konkurs. Vi behandlar dem per år.

2.1 Lån

Ett lån på X kronor ger

$$\begin{aligned}
K_S^{t+1} &= K_S^t + X \\
L^{t+1} &= L^t + X \\
M^{t+1} &= M^t + (1-f)X \\
K_B^{t+1} &= K_B^t - fX \\
P^{t+1} &= P^t + (1-f)X
\end{aligned}$$

En amortering på X kronor blir detsamma som ett lån av $-X$. Här är E_B och E_S är invarianta.

2.2 Ränta

En räntebetalning om X ger

$$K_S^{t+1} = K_S^t - X$$
$$E_S^{t+1} = E_S^t - X$$
$$K_B^{t+1} = K_B^t + X$$
$$E_B^{t+1} = E_B^t + X$$

Här är L och M är invarianta.

2.3 Konkurs

En konkurs med en kreditförlust om X kronor ger

$$L^{t+1} = L^t - X$$
$$E_B^{t+1} = E_B^t - X$$
$$E_S^{t+1} = E_B^t + X$$

Här är K_B och K_S invarianta, det är bara en överföring av eget kapital.

3 Skuld och penningmängd

Nu ska vi se om vi kan få ihop det här. Vi startar alltså med $L^0 = M^0 = 0$ och $E_B^0 = K_B^0 > 0$ och $E_S^0 = K_S^0$. Modellen är nåt i stil med att det fanns en ursprunglig hög med guld eller bitcoins, som på något sätt delades upp mellan B och S.

Säg att vi önskar att penningmängden ökar med g år efter år, dvs $P^{t+1} = (1+g)P^t = P^t + gP^t$. Om N^t är årets nettoutlåning (lån minus amortering) följer från utlåningsekvationen att

$$gP^t = (1-f)N^t$$

eller

$$N^t = \frac{g}{1-f}P^t = \frac{g(1+g)^t}{1-f}P^0$$

Men vi kan inte direkt sätta upp detta som ökad skuldsättning, för vi har kreditförluster också.... Vi låter de vara kL^t årligen.

$$L^{t+1} = (1-k)L^t + \frac{g(1+g)^t}{1-f}P^0$$

vilket är ett linjärt system på formen $x_{k+1} = \alpha x_k + A\beta^k$, med $0 < \alpha < 1$ och $\beta > 1$ (se avsnitt 6). Vi får

$$L^t = \frac{(1+g)^t - (1-k)^t}{(1-f)(g+k)} gP^0$$

För stora t, så går termen $(1-k)^t$ mot noll, och vi får

$$L^t \approx \frac{(1+g)^t gP^0}{(1-f)(g+k)} = \frac{g}{(1-f)(g+k)}P^t$$

4 Kassa och eget kapital

Nästa är frågan vem som disponerar pengarna. Med en årlig ränta på rL^t och nettoutlåning på N^t får vi för bankens och samhällets kassa

$$
\begin{aligned}
K_S^{t+1} &= K_S^t + N^t - rL^t \\
K_B^{t+1} &= K_B^t - fN^t + rL^t
\end{aligned}
$$

Sätt för enkelhets skull in det asymptotiska uttrycket för L^t,

$$
\begin{aligned}
K_S^{t+1} &= K_S^t + \frac{gP^t}{1-f}\left(1 - \frac{r}{g+k}\right) \\
K_B^{t+1} &= K_B^t + \frac{gP^t}{1-f}\left(\frac{r}{g+k} - f\right)
\end{aligned}
$$

För att undvika att någondera kassan närmar sig noll (det vill säga likviditetsproblem) krävs en ränta r i intervallet

$$f(g+k) < r < g+k$$

För det egna kapitalet, så påverkas det av räntebetalningar och konkurser,

$$
\begin{aligned}
E_B^{t+1} &= (r-k)L^t \\
E_S^{t+1} &= (k-r)L^t
\end{aligned}
$$

Det är tydligen ett nollsummespel, och kräver $r = k$ i alla fall i genomsnitt för varken bankens eller samhällets egna kapital ska gröpas ur. Och det följer att $E_B/K_B^t \to 0$ och $E_S/K_S^t \to 0$ då $t \to \infty$.

5 Felaktigheter

Jag har sett ett par problem med modellen ovan.

5.1 Reservationsgrad

Jag är osäker på hur den begränsning som ges av ”reservationsgraden” egentligen fungerar. Ovan är den kopplad till bankens kassa. Detaljerna är lite för komplicerade för att jag ska kunna säga om det är en rimlig approximation eller inte. Se `http://www.fi.se/Regler/Kapitaltackning/` och `http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:177:0001:0200:SV:PDF`, i närheten av artikel 57.

Kanske behöver modellen göras om ordentligt, med ett villkor liknande $L \leq fE_B$ istället? (Där E_B skulle vara en approximation av bankens ”kapitalbas” enligt Basel-reglerna).

5.2 Investeringar

Investeringar gör att eget kapital slutar vara ett nollsummespel. Om man till exempel bygger ett hus, så kommer pengar bara att omflyttas från husägaren till leverantörer och byggarbetare, så de totala monetära tillgångarna är oförändrade.

Men huset bokförs som en tillgång, typiskt med en initial värdering motsvarande byggkostnaden, följt av periodiska avskrivningar.

För enkelhets skull kan vi nog anta att banken inte ägnar sig åt investeringar, eller att B är den del av banken som ägnar sig åt utlåning.

Om vi inför en egen post för icke-monetära tillgångar, T, så för vi utöka balansräkningen för S till

$$K_S + T = E_S + L$$

Investeringar gör att T, och därmed E_S, växer. Och T minskas med avskrivningar. Det är lite oklart hur vi ska få in detta i modellen. Investeringar kan göras med lånade eller egna pengar. Och det ligger en del godtycke i värderingar och avskrivningsregler.

6 Appendix

Betrakta systemet

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \alpha x_k + A\beta^k \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

Lösningen är på formen $x_k = c_0 + c_1\alpha^k + c_2\beta^k$. Vi får

$$c_0 + c_1\alpha^{k+1} + c_2\beta^{k+1} = \alpha c_0 + c_1\alpha^{k+1} + (c_2\alpha + A)\beta^k$$

och kan identifiera $c_0 = 0$, $c_2\beta = c_2\alpha + A$, vilket ger oss

$$c_2 = \frac{A}{\beta - \alpha}$$

Från startvillkoret får vi också $c_1 = -c_2$. Alltså

$$x_k = \frac{A(\beta^k - \alpha^k)}{\beta - \alpha}$$